Oplossingen van de VWP's
IN 'GETALLEN' (EUCLIDES SPECIAL 2012)

VWP 1 – Tja …
Als het product van de leeftijden 72 is, dan zijn er de volgende mogelijkheden:

1	1	72	1	6	12	2	4	9
1	2	36	1	8	9	2	6	6
1	3	24	2	2	18	3	3	8
1	4	18	2	3	12	3	4	6

Hierbij zijn twee series met dezelfde som, nl. 2, 6, 6 en 3, 3, 8. De som is 14; dit is het huisnummer van B. Omdat uit het laatste antwoord blijkt dat er een oudste is, zijn de leeftijden 3, 3 en 8.

VWP 2 – 521 wordt 215
Omdat het eerste cijfer van het gezochte getal een 7 is – dit is ook het laatste cijfer van de transposiet, worden we gedwongen de volgende rij cijfers (van rechts naar links) te kiezen:
5 (want $7 \times 5 = 35$; 5 opschrijven, 3 onthouden)
8 (want $5 \times 5 = 25$; plus de onthouden 3 geeft 28; 8 opschrijven, 2 onthouden)
2 (want $8 \times 5 = 40$; plus de onthouden 2 geeft 42; 2 opschrijven, 4 onthouden)
4 (want $2 \times 5 = 10$; plus de onthouden 4 geeft 14; 4 opschrijven, 1 onthouden)
1 (want $4 \times 5 = 20$; plus de onthouden 1 geeft 21; 1 opschrijven, 2 onthouden)
7 (want $1 \times 5 = 5$; plus de onthouden 2 geeft 7)
Het gevraagde getal is dus: 714285 (het vijfde deel ervan is: 142857).

VWP 3 – Rij verder
De rij bestaat uit de priemgetallen (ondeelbare getallen) 2, 3, 5, 7, …, elk vermeerderd met 1.
De volgende getallen in de rij zijn dus 42, 44, 48, enz.

VWP 4 – Splitsen
a.
Noem het door de vier stippen (•) voorgestelde getal a, en het door de vier kruisjes (×) voorgestelde getal b.
Dan moet:
$$10000a + b = a(a + b)$$
$$b = a(a + b) - 10000a$$
$$b = a(a + b - 10000)$$
Hieruit volgt dat b deelbaar is door a. We krijgen dan de volgende mogelijkheden:
$$b = a\ ,\ b = 2a\ ,\ \ldots,\ b = 9a$$

Gaan we deze mogelijkheden na, dan vinden we twee oplossingen:

$b = 2a$ levert: $a = 3334$ en $b = 6668$

$b = 8a$ levert: $a = 1112$ en $b = 8896$

b.

Het probleem komt neer op het oplossen van de vergelijking:

$$a \cdot 10^n + b = a(a + b)$$

waarin a, b en n natuurlijke getallen zijn en $b < 10^n$.
Hieruit volgt dat b deelbaar is door a.

Stel $b = pa$ (p natuurlijk en ≤ 9). De vergelijking gaat dan over in:

$$a \cdot 10^n + pa = a(a + pa)$$

$$10^n + p = a + pa$$

$$a(p+1) = 10^n + p$$

Hieraan kan slechts voldaan worden als p even is en $p \neq 4$; dus $p = 2$, 6 of 8.
Onderstel $p = 2$. Bij elke waarde van n vinden we dan een waarde van a.

$n = 1$	$3a = 12$	$a = 4$	$48 = 4 \cdot (4 + 8)$
$n = 2$	$3a = 102$	$a = 34$	$3468 = 34 \cdot (34 + 68)$
$n = 3$	$3a = 1002$	$a = 334$	$334668 = 334 \cdot (334 + 668)$
$n = 4$	$3a = 10002$	$a = 3334$	$33346668 = 3334 \cdot (3334 + 6668)$

enz.

Onderstel $p = 8$. Bij elke $n \geq 2$ vinden we een waarde van a.

$n = 2$	$9a = 108$	$a = 12$	$1296 = 12 \cdot (12 + 96)$
$n = 3$	$9a = 1008$	$a = 112$	$112896 = 112 \cdot (112 + 896)$
$n = 4$	$9a = 10008$	$a = 1112$	$11128896 = 1112 \cdot (1112 + 8896)$

enz.

Onderstel $p = 6$. We vinden nu bij elke n waarvoor $10^n \equiv 1 \pmod 7$ (d.w.z. dat de rest van 10^n bij deling door 7 gelijk is aan 1) een waarde van a, en bij geen andere waarden van n. Dus bij die waarden van n die deelbaar zijn door 6.

$n = 6$	$7a = 1000006$	$a = 142858$	$142858857148 = 142858 \cdot (142858 + 857148)$
$n = 12$	$7a = 1000000000006$	$a = 142857142858$	$142857142858857142857148 =$
			$= 142857142858 \cdot (142857142858 + 857142857148)$

enz.

VWP 5 – 315 wordt 153

Zie voor een overeenkomstige berekening eerst het antwoord van VWP 2.

Omdat we in dit geval het eerste cijfer van het gezochte getal niet kennen, is het eigenlijk noodzakelijk te onderzoeken of het getal kan beginnen met 9, 8, … of met 1.
Is het eerste cijfer ook nu een 7, dan is het getal 736842105263157894.

Is het eerste cijfer een 5, dan krijgen we dezelfde cijfers, alleen cyclisch gepermuteerd. We moeten in dit geval het gezochte getal beginnen met de onderstreepte 5. We krijgen dan:

526315789473684210

Het kleinste getal dat aan de voorwaarde voldoet, is dus het getal dat begint met een 1:

105263157894736842

VWP 6 – Priem?

a.

Tot en met $n = 40$ ontstaan priemgetallen. Voor $n = 41$ ontstaat echter *geen* priemgetal, omdat de uitkomst dan een veelvoud is van 41.

b.

In dit geval is de kleinste waarde van n waarvoor de uitkomst *geen* priemgetal is, $n = 80$. De uitkomst is dan 1681 en dit is gelijk aan 41^2.

VWP 7 – Geschikt

Alfabetisch: acht, achtendertig, achtentwintig, …, zeventien.

VWP 8 – Drieën

De algebra leert [1] dat voor de som van de kwadraten van 1 tot en met 10^n geldt:

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + 10^{2n} = \tfrac{1}{6}(2\cdot 10^{3n} + 3\cdot 10^{2n} + 1\cdot 10^n)$$

Het getal tussen (en) in het rechter lid wordt geschreven als:

$$2\underbrace{00\ldots03}_{n\text{ cijfers}}\underbrace{00\ldots01}_{n\text{ cijfers}}\underbrace{00\ldots00}_{n\text{ cijfers}}$$

Delen we dit getal door 6, dan krijgen we:

$$\underbrace{33\ldots33}_{n\text{ cijfers}}\underbrace{83\ldots33}_{n\text{ cijfers}}\underbrace{50\ldots00}_{n\text{ cijfers}}$$

Het aantal cijfers 3 hierin is gelijk aan $2n - 1$.

VWP 9 – Deelbaar

We hoeven alleen te zorgen voor deelbaarheid door 11. Omdat de som van de cijfers 45 is, zijn de sommen van de cijfers op de even en op de oneven plaatsen 17 en 28 (6 en 39 is niet mogelijk). Voor 5 cijfers die als som 17 hebben, vinden we de volgende mogelijkheden:

0 1 2 5 9	0 1 3 6 7	0 2 4 5 6
0 1 2 6 8	0 1 4 5 7	1 2 3 4 7
0 1 3 4 9	0 2 3 4 8	1 2 3 5 6
0 1 3 5 8	0 2 3 5 7	

De cijfers in deze 11 getallen kunnen op 5! manieren gerangschikt worden en dan nog op de even of oneven plaatsen gezet worden. Bij elk van deze $2 \cdot 5! \cdot 11$ mogelijkheden behoren 5! mogelijke rangschikkingen van de overige 5 cijfers. Dit levert dus in totaal $2 \cdot 5! \cdot 5! \cdot 11$ mogelijkheden.

Omdat in $\frac{1}{10}$-deel van deze gevallen het cijfer 0 op de voorste plaats komt, moeten we de uitkomst nog met $\frac{9}{10}$ vermenigvuldigen. We vinden dus:

$$\tfrac{9}{10}\cdot 2\cdot 5!\cdot 5!\cdot 11 = 285120 \text{ getallen}$$

VWP 10 – Minimaal

Het gevraagde getal is het kleinste getal n met de eigenschap dat $n!$ 1000 factoren 5 bevat.
We onderzoeken nu eerst hoeveel factoren 5 het getal $(5^k)!$ bevat.
Onder de getallen 1, 2, …, 5^k zijn er 5^{k-1} deelbaar door 5, 5^{k-2} deelbaar door 5^2, 5^{k-3} deelbaar door 5^3, enz. Dus is het aantal factoren 5 dat in $(5^k)!$ voorkomt, gelijk aan:

$$5^{k-1} + 5^{k-2} + 5^{k-3} + \ldots + 1 = \tfrac{1}{4}(5^k - 1)$$

Het aantal factoren 5 dat $(a_0 5^k + a_1 5^{k-1} + \ldots + a_{k-1}5)!$, met $0 \le a_j \le 4$; $a_0 \ne 0$, bevat is dus:

$$\tfrac{1}{4}(a_0 5^k + a_1 5^{k-1} + \ldots + a_{k-1}5 - a_0 - a_1 - \ldots - a_{k-1})$$

Dit moet gelijk zijn aan 1000, en dus moet:

$$a_0 5^k + a_1 5^{k-1} + \ldots + a_{k-1}5 = 4000 + a_0 + a_1 + \ldots + a_{k-1}$$

We schrijven nu 4000 als som van machten van 5, dus als: $1\cdot 5^5 + 1\cdot 5^4 + 2\cdot 5^3$. Dan moet gelden:

$$a_0 5^k + a_1 5^{k-1} + \ldots + a_{k-1}5 = 1\cdot 5^5 + 1\cdot 5^4 + 2\cdot 5^3 + a_0 + a_1 + \ldots + a_{k-1}$$

Hieruit volgt:
$k = 5$, $a_0 = 1$, $a_1 = 1$, $a_2 = 2$, $a_3 = 0$
en verder:
$5a_4 = 4 + a_4$, dus: $a_4 = 1$
Het gevraagde getal is daarmee $3125 + 625 + 2 \cdot 125 + 5 = 4005$.

Uit deze oplossing ziet men ook hoe men te werk moet gaan als het getal 1000 in de opgave door een ander getal vervangen wordt.

Noot

[1] Zie bijvoorbeeld: *http://hhofstede.nl/modules/rijverschillen.htm* .

Verantwoording

De oplossingen zijn – in een enkel geval enigszins bewerkt – overgenomen uit:
P.G.J. Vredenduin (1964): *Vijfentachtig wiskundige puzzels*. Groningen: P. Noordhoff N.V.

≡ ≡ ≡ ≡ ≡